Colle du 16/02 - Sujet 1
Espaces vectoriels et dimension

Question de cours. Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Soient $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, $F = \{ f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0 \}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{ch}, \mathrm{ch}', \mathrm{ch}'', \mathrm{ch}'''\right)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer une base de G.
3. Montrer que $F \oplus G = E$.

Exercice 2. Soient $F = \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et $G = \{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0 \}$.

1. Déterminer la dimension de F et G.
2. Déterminer un supplémentaire **commun** à F et G.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 16/02 - Sujet 2
Espaces vectoriels et dimension

Question de cours. Démontrer la caractérisation de la somme directe par le théorème des bases adaptées.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $f_k : x \mapsto \sin\left(2^k x\right)$. La famille $(f_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est-elle libre ?

Exercice 2. Soit $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x-y+2z+t=0 \end{array} \right\}$ et $G = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-2z+3t=0 \}$.

1. Déterminer la dimension de F puis celle de $F+G$.
2. Vérifier que $(1,1,-2,3) \in F \cap G$. En déduire $F \cap G$.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 16/02 - Sujet 3
Espaces vectoriels et dimension

Question de cours. Démontrer la caractérisation de la somme directe par l'intersection.

Exercice 1. Soient $F = \left\{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^tM + M \in \mathscr{D}_2(\mathbb{R}) \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base puis un supplémentaire de F dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, $P_i = X^i (X-1)^{n-i}$. Montrer que $(P_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.